Algunos genios de la Geometría.

Capítulo 1

Algunos métodos de demostración

Contenido breve

Presentación

Cualquier ciencia, por abstracta que sea (en especial la matemática), tiene sus comienzos en la experimentación, y la geometría, que está basada en la medición y la observación, no escapa a este principio. Esta es la razón por la cual empiezo con un enfoque histórico y paso luego a la geometría moderna, cuyo desarrollo se debe a métodos y conceptos desarrollados en Europa entre los siglos XVI y XIX y que son una continuación de los teoremas clásicos de Euclides, mucho más refinados y sofisticados.

Bajo el supuesto de que el lector tiene pocos conocimientos de geometría, o ninguno, planteo las propiedades de los números reales y las leyes de inferencia lógica que permitieron mostrar luego algunos métodos de demostración que servirán para el posterior desarrollo del curso.

Los módulos que comprenden este capítulo analizan temas que están correlacionados entre sí: la geometría en sus inicios (clásico) con la geometría moderna, las leyes de los números reales y las leyes lógicas –los métodos de demostración basados en un método deductivo–, las condiciones necesaria y suficiente, y termina el módulo 6 con las variantes del condicional.

Módulo 1

Historia de la geometría

Contenidos del módulo

1.1 Breve reseña histórica de la geometría
1.2 La geometría moderna

Objetivos del módulo

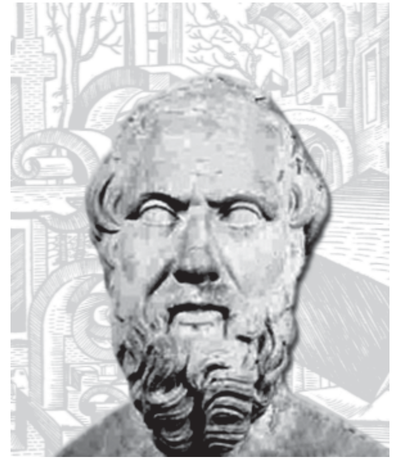
1. Describir la diferencia entre la geometría experimental y la deductiva.
2. Bosquejar el desarrollo de la geometría en el tiempo.
3. Enumerar los términos primitivos.
4. Mostrar los contenidos de los libros de Euclides.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la geometría? ¿Qué significa?
2. ¿Qué es la geometría experimental?
3. ¿Qué es la geometría deductiva?
4. ¿Qué son el método inductivo y el deductivo?
5. ¿Qué son los *Elementos* de Euclides?
6. ¿Quiénes han intervenido en el desarrollo de la geometría?
7. ¿Qué y cuáles son los términos primitivos?

Introducción

Con este módulo se da inicio al estudio de la *Geometría Euclidiana*. Se comienza con los orígenes de ella, basada en la observación y en la forma como evoluciona, y se llega a una geometría deductiva. Se dan los nombres de los principales sabios matemáticos que a través del tiempo han aportado sus conocimientos al desarrollo de la geometría y se muestran los principios del enfoque moderno de la misma.



Heródoto

(c. 484-425 a.C.). Historiador griego, nacido en Halicarnaso (actual Bodrum, en Turquía)

Vea el módulo 1 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

1.1 Breve reseña histórica de la geometría

Desde los comienzos del mundo el ser humano ha tenido la necesidad de contar, medir y evaluar y para ello ha escogido unidades correspondientes, pero es imposible determinar con exactitud la fecha en que se dio origen a las ideas de partida y más aún cuándo se presentaron por primera vez las propiedades relacionadas con la figuras geométricas. Sin embargo, se cree que la geometría es una de las actividades más antiguas conocidas desde el punto de vista intelectual y que fueron los babilonios, alrededor del año 2000 a.C., y los egipcios, aproximadamente en 1300 a.C., quienes desarrollaron la forma primitiva de la geometría basados en mediciones y observaciones (método inductivo); las pirámides son una muestra de los conocimientos que ellos tenían de esta ciencia.

La palabra geometría se deriva de las palabras griegas «geo», que significa «tierra», y «metrón», que significa «medir». Durante siglos el conocimiento de la geometría creció de tal manera que se descubrió que muchas afirmaciones se podían inferir de otras en forma deductiva y fue precisamente en Grecia donde se cultivó con más dedicación por parte de los sabios, quienes llegaron a la conclusión de que la mayoría de las afirmaciones geométricas se deducían de unas pocas proposiciones básicas (método deductivo).

Alrededor del año 300 a.C., Euclides de Alejandría recopiló en sus famosos *Elementos de la geometría* los conocimientos geométricos que existían hasta entonces. Los *Elementos* constan de trece libros (capítulos hoy en día) con 465 proposiciones, que comprenden la geometría plana, la geometría del espacio, la teoría de números y el álgebra geométrica griega. Los cinco primeros libros tratan de figuras planas, los cuatro siguientes son llamados aritméticas (teoría de números) y los tres restantes son dedicados a la geometría del espacio. También dejó Euclides un libro titulado *Datos* y escribió además sobre las secciones cónicas.

Entre los sabios y matemáticos más eminentes que han contribuido al desarrollo de esta ciencia en general podemos citar a Tales de Mileto (c. 624-c. 548 a.C.), Pitágoras (c. 572-c.497 a.C.) y Platón (c. 427-c. 347 a.C.). Posterior a Euclides podemos considerar a Arquímedes (287-212 a.C.) y Apolonio de Perga (¿262-180? a.C.), con quien termina la edad de oro de la geometría griega, pues los geómetras posteriores hicieron poco más que llenar los detalles y en algunas ocasiones desarrollar en forma independiente algunas teorías cuyos gérmenes estaban contenidos en los trabajos de los predecesores. Entre ellos podemos mencionar a Herón de Alejandría (20-62 d.C.), Menelao de Alejandría (100 a.C.), Pappus de Alejandría (ss. III-IV), Kepler (1571-1630), Newton (1642-1727) y otros grandes matemáticos.

1.2 La geometría moderna

El tratamiento moderno de la geometría se debe al matemático alemán David Hilbert (1862-1943), quien desarrolló en su obra *Fundamentos de la geometría* (1899) un conjunto de postulados (21) para la geometría euclidiana que no se separan mucho de los principios de Euclides.

En los tratados modernos de los postulados de la geometría euclidiana no hay descripciones de objetos como en los *Elementos* de Euclides, sino unas premisas que son el punto de partida para el desarrollo de resultados posteriores. Se supone que existen sólo tres grupos de objetos primitivos llamados «puntos», «rectas» y «planos», con respecto a los cuales se verifican ciertas condiciones (postulados).

Las proposiciones que se concluyan de los postulados, por medio de las reglas lógicas, son formalmente válidas si se han cumplido las siguientes condiciones:

1. Que se hayan enunciado explícitamente los términos primitivos con los cuales se definen los otros.

2. Que se hayan enunciado unas proposiciones iniciales con las cuales se pretende demostrar todas las demás. Dichas proposiciones son los postulados. Éstos deben cumplir las siguientes condiciones:

   - Consistencia: no pueden ser contradictorios entre sí.
   - Independencia: ningún postulado debe deducirse de los demás.
   - Suficiencia: los resultados requeridos en la teoría deben ser una consecuecia de ellos o contradecirlos.

3. Que las relaciones establecidas entre los términos sean relaciones lógicas independientes del sentido que pueda darse a los términos.

4. Que en las demostraciones no se suponga nada de las figuras, es decir, que sólo intervengan las relaciones lógicas.

Debido a que hasta el momento no se tienen conocimientos de geometría para desarrollar demostraciones formales, se hará una lista de las leyes o propiedades de los números reales y las reglas de inferencia lógica para mostrar algunos métodos de demostración (módulo 3).

Heródoto

A Heródoto se le conoce como el padre de la historiografía. Su gran obra, conocida como *Historias*, ha sido dividida en nueve libros. En los primeros se relatan costumbres, leyendas, historia y tradiciones de diversos pueblos del mundo antiguo (lidios, escitas, medas, persas, asirios y egipcios), y los tres últimos tratan los conflictos armados entre Grecia y Persia (que tuvieron lugar a principios del siglo V a.C.), conocidos como las Guerras Médicas. Heródoto creía que el Universo estaba regido por el destino y el azar, pero le daba gran importancia al sentido moral con que las personas actuaban. Para él, la arrogancia era castigada por los dioses. Este intento de extraer lecciones morales del estudio de los grandes acontecimientos, es la base de la historiografía griega y romana.

Módulo 2

La demostración

Contenidos del módulo

2.1 La demostración

Objetivos del módulo

1. Describir las partes de una demostración.
2. Diferenciar las etapas de una demostración.
3. Relacionar los fundamentos de la demostración.
4. Construir una demostración.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una demostración?
2. ¿Cómo está constituida una demostración?
3. ¿Qué orden debe tener una demostración?
4. ¿En qué momento termina una demostración?

Introducción

Los términos primitivos o no definidos constituyen la herramienta básica para las definiciones y los postulados que serán los fundamentos en el proceso demostrativo, junto a otros conocimientos que se pueden aportar. En este módulo no se profundiza en la demostración porque aún no se han estudiado muchos conceptos geométricos ni se dispone de las propiedades de los números reales.

Michel Chasles

(1793-1880). Matemático francés nacido en Epernon y muerto en París.

Vea el módulo 2 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

2.1 La demostración

Sin pretender dar una definición muy rigurosa podemos considerar la demostración de una proposición *p* como una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas o supuestamente verdaderas y las cuales nos conducen a la proposición *p*.

Una proposición o relación resultante de otras mediante el proceso de la demostración se llama *deducida* o *demostrada*.

Cuando se han establecido los términos primitivos, los términos definidos y un sistema de postulados, podemos continuar definiendo nuevos términos y formulando proposiciones nuevas que no entran o conducen a contradicciones y cuya verdad o falsedad debe probarse. Tales proposiciones se llaman *teoremas*.

Definición 2.1: Teorema

Un teorema es toda proposición cuya validez se puede demostrar utilizando otros elementos conocidos, mediante operaciones lógicas perfectamente coordinadas. No siempre tenemos evidencia directa de la validez de un teorema. Eso depende en parte de su grado de complejidad y de nuestra mayor o menor familiaridad con su contenido.

Un teorema requiere demostración cuando no hay evidencia de su validez.

La demostración consta de tres partes (figura 2.1):

a. El conocimiento o proposición que se trata de demostrar. En esta parte es importante diferenciar muy claramente la información que nos dan (la hipótesis) de lo que nos solicitan que demostremos (la tesis).
b. Los fundamentos empleados como base de la demostración. Estos fundamentos están constituidos por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones o teoremas ya demostrados.
c. El procedimiento usado para lograr que el conocimiento quede demostrado (elegir el método adecuado). Este método puede ser el deductivo o el inductivo.

El método deductivo consiste en partir de un número reducido de información (hipótesis-fundamentos) y mediante un proceso lógico deducir otros conocimientos o proposiciones nuevos.

El esquema sería:

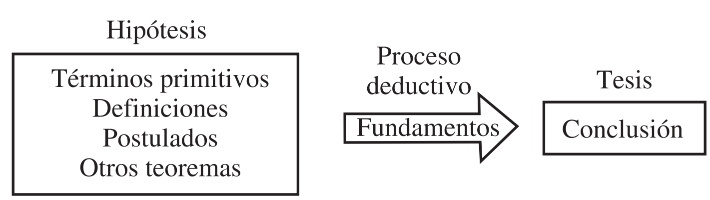


Figura 2.1. Método deductivo

El método inductivo es generalmente usado en las ciencias físicas, naturales y sociales porque a partir de una serie finita de casos se llega a la afirmación de la verdad de una proposición.

Generalmente, la estructura de una demostración se expresa por medio de una implicación de la forma $H \Rightarrow T$, donde:

a. Se acepta que H (la hipótesis) es verdadera y está constituida por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones (teoremas) cuya validez ha sido probada.
b. Se establece una sucesión finita de afirmaciones que son combinaciones y conexiones de los elementos de la hipótesis H y los fundamentos que van a determinar que H implica a T.
c. Se afirma que T (tesis o conclusión) es verdadera (está basada en el principio filosófico: «De la verdad no se puede seguir la falsedad»).

Nota: el problema de la construcción de una demostración consiste en preparar una serie de pasos que conduzcan a la conclusión deseada. No hay procedimientos establecidos para hacerlo y por ello la demostración constituye un proceso creador dentro de un conocimiento científico que se adquiere con la práctica y el desarrollo de la iniciativa de cada uno.

En geometría una ayuda importante en la demostración es una figura que muestra una clase particular de toda una clase de figuras geométricas para las cuales tiene validez el teorema que se va a demostrar.

Michel Chasles

Los trabajos de Chasles versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva, en especial sobre las cónicas. Descubrió independientemente alguno de los resultados de Jacob Steiner.

Fue practicante del llamado método mixto: pensaba sus resultados analíticamente y los presentaba sintéticamente. Chasles introdujo el término *homografía* y definió las *correlaciones*. Uno de sus resultados más conocidos asegura que «cuatro puntos fijos de una cónica determinan con un quinto punto de la misma cuatro rectas cuya razón doble no depende de ese último punto».

Gracias a Chasles, el tratado de Gérard Desargues sobre la perspectiva fue reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo primitivo de la geometría proyectiva. Este trabajo, que fuera despreciado en su momento por la mayoría de los matemáticos, fue desarrollado por Michel Chasles mientras escribía su obra *Historia de la geometría*.

Módulo 3

Leyes

Contenidos del módulo

3.1 Propiedades de los números reales
3.2 Leyes de la lógica proposicional

Objetivos del módulo

1. Diferenciar las propiedades de los números reales.
2. Clasificar las relaciones equivalentes.
3. Formular las reglas de inferencia.
4. Utilizar las reglas de inferencia.

Preguntas básicas

1. ¿Qué vamos a demostrar?
2. ¿Cuáles son las propiedades de los números reales?
3. ¿Para qué o en qué los vamos a utilizar?
4. ¿Qué son las leyes lógicas?
5. ¿Cuáles son las leyes lógicas?
6. ¿Qué son las relaciones equivalentes? ¿Cuáles son?
7. ¿En qué se aplican las leyes o relaciones equivalentes?

Introducción

Como aún no se tienen conocimientos geométricos, pero sí sobre los números y sobre el álgebra, entonces se presenta en este módulo un listado de las propiedades básicas de los números reales para aplicarlas posteriormente en las demostraciones. Se hace además una breve presentación de las leyes y reglas de inferencia lógica para posteriores aplicaciones.

Lazare Nicolas Carnot

(1753-1823). Ingeniero y general del ejército francés, nacido en Nolay y muerto en Magdeburgo.

Vea el módulo 3 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

3.1 Propiedades de los números reales

Así el lector esté familiarizado con las propiedades del sistema de los números reales, es conveniente presentarlas en este módulo antes de comenzar los métodos de demostración.

Los métodos de demostración están aplicados a las propiedades de los números reales, porque aún no se tienen elementos de geometría para su aplicación.

Con frecuencia en el desarrollo del curso el estudiante se referirá a estas propiedades con su nombre o enunciándolas, o bien como propiedades de números reales simplemente.

Propiedades de la igualdad

1. Reflexiva: $a = a$
2. Simétrica: $a = b \rightarrow b = a$
3. Transitiva: $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$
4. Aditiva: $(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a + c) = (b + d)$
5. De la sustracción: $(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a - c) = (b - d)$
6. Multiplicativa: $(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow ac = bd$
7. De la división: $(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow a / c = b / d$ con $c \neq 0 \wedge d \neq 0$
8. Cancelativa: $(ac = bc \wedge c \neq 0) \rightarrow a = b$
9. Sustitutiva: una ecuación no cambia de validez si una expresión se sustituye por otra equivalente.

Definición 3.1: Relación de orden

Un número real es *positivo* si y sólo si es mayor que cero. Escribimos:

$a \in \mathbb{R}^{+} \leftrightarrow a > 0$

Un número real es *negativo* si y sólo si es menor que cero. Escribimos:

$a \in \mathbb{R}^{-} \leftrightarrow a < 0$

$>$: Mayor que $<$: Menor que $\geq$: Mayor o igual que $\leq$: Menor o igual que

Se debe tener presente que $a > b$ y $b < a$ son equivalentes, es decir, son formas diferentes de expresar lo mismo.

1. Ley o propiedad de tricotomía: para todo par de números reales, a y b, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

2. Adición: $(a > b) \wedge (c > d) \rightarrow (a + c) > (b + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

3. Sustracción: $a < b \rightarrow a - c < b - c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

4. Multiplicación: $\left.\begin{array}{l} a > b \wedge c > 0 \rightarrow ac > bc \\ a > b \wedge c < 0 \rightarrow ac < bc \end{array}\right\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

5. División: $\left.\begin{array}{l} a > b \wedge c > 0 \to a/c > b/c \\ a > b \wedge c < 0 \to a/c < b/c \end{array}\right\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

6. Transitiva: $a > b \wedge b > c \to a > c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

7. Invertiva: $a > b \to \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, con $a \wedge b \neq 0$

Propiedades de la adición

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

1. Cerradura: $a + b$ es un número real
2. Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Modulativa: $a + 0 = 0 + a = a$
4. Invertiva: $a + (-a) = (-a) + a = a - a = 0$
5. Conmutativa: $a + b = b + a$

Propiedades de la multiplicación

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

1. Cerradura: $a \cdot b$ es un número real
2. Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
4. Modulativa: $1 \cdot a = a$
5. Invertiva: $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$, con $a \neq 0$
6. Distributiva: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = ab + ac$

Las propiedades de la adición y la multiplicación constituyen las «propiedades de campo de los números reales».

3.2 Leyes de la lógica proposicional

Es conveniente que el lector tenga presente la estructura y composición de las proposiciones lógicas, los conectivos, las tablas de verdad y las tautologías.

Como las tautologías son esquemas válidos de inferencia, constituyen entonces el punto de partida para las leyes lógicas que son universalmente verdaderas.

A continuación enumeramos algunas leyes lógicas que con regularidad estamos aplicando en las ciencias.

1. Ley de identidad: $p \Leftrightarrow p$
2. Ley de contradicción: $(p \wedge \sim p)$
3. Ley del tercero excluido: $p \vee \sim p$
4. Ley de doble negación: $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
5. Leyes de simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$; $(p \wedge q) \Rightarrow q$

   que se suelen expresar: $\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ p \end{array}$ o $\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ q \end{array}$

6. Ley de adición (LA): $p \Rightarrow (p \vee q)$; $q \Rightarrow (p \vee q)$

Lazare Nicolas Carnot

Lazare Nicolas Carnot es el padre de Nicolas Léonard Sadi Carnot, físico que describió el ciclo térmico que lleva su nombre y a partir del cual se descubrió el segundo principio de la termodinámica. En su libro *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*, Lazare Carnot intentó demostrar que los métodos de Newton y Leibniz son algoritmos equivalentes al método de exhaución de Arquímedes. Una de las conclusiones posteriores a este trabajo fue que los verdaderos principios metafísicos son los principios de compensación de errores. Según su razonamiento, los infinitesimales son cantidades despreciables que son introducidas, al igual que los números imaginarios, para facilitar los cálculos, y son eliminadas para alcanzar el resultado final. Asimismo, las ecuaciones imperfectas se vuelven perfectamente exactas en el cálculo mediante la eliminación de cantidades tales como los infinitésimos de orden superior, que son una fuente de errores. Otra de sus más importantes obras es *Géométrie de la position*.

7. Leyes conmutativas:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

8. Leyes asociativas:

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$
$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$
$$[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$$

9. Leyes distributivas:

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$
$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$
$$[p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$$
$$[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$$

10. Ley transitiva o silogismo hipotético: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow p \rightarrow r$ que también se suele expresar:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

11. Ley de transposición: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

12. Ley del bicondicional: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

13. Ley del condicional-disyunción: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

14. Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

15. Ley modus ponendo-ponens (PP)

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Leftrightarrow q \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\;} \\ q \end{array}$$

16. Ley modus tollendo-tollens (TT)

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow \sim p \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \sim p \end{array}$$

17. Ley modus tollendo-ponens (TP)

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

18. Ley del silogismo disyuntivo:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow s} \\ r \vee s \end{array}$$

Un caso particular del silogismo disyuntivo es:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Existen tres reglas básicas de validez que se aplican continuamente.

Regla 1: las definiciones, los postulados y los teoremas demostrados pueden aparecer en cualquier paso de la demostración.

Regla 2: proposiciones equivalentes se pueden sustituir entre sí en cualquier parte de una demostración.

Regla 3: una proposición se puede introducir en cualquier punto de la demostración.

Módulo 4

Métodos de demostración

Contenidos del módulo

4.1 Demostración directa
4.2 Esquema de la demostración directa
4.3 Demostración indirecta

Objetivos del módulo

1. Analizar el enunciado que se va a demostrar.
2. Relacionar los fundamentos en la demostración.
3. Diferenciar la demostración directa de la demostración indirecta.
4. Utilizar los conocimientos en la demostración para justificar los pasos dados.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la demostración directa?
2. ¿Cómo establecer los fundamentos para la demostración?
3. ¿Cómo relacionar los fundamentos?
4. ¿Cuál es la diferencia entre la demostración directa y la indirecta?
5. ¿Cuándo hacer una demostración indirecta?

Introducción

En la mayoría de los casos, los alumnos tienen mucho temor de enfrentar una demostración de alguna proposición. La pregunta que más se escucha es: ¿cómo empiezo? Se espera que la orientación dada en la presente sección contribuya a darle confianza al alumno en este arte.

Jacob Steiner

(1796-1863). Matemático suizo nacido en Utzenstorf y muerto en Berna.

Vea el módulo 4 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

4.1 Demostración directa

Los procedimientos de demostración establecen la conexión lógica entre los fundamentos y sus consecuencias sucesivas, hasta llegar a la tesis o conclusión final. Las diferentes formas de ordenar los elementos de la demostración (fundamentos, consecuencias directas, conclusión final) establecen diferentes tipos de procedimientos demostrativos, a saber: *demostración directa* y *demostración indirecta*.

La demostración directa del teorema $H \Rightarrow T$ es el procedimiento que nos prueba la verdad de *T* mediante una serie finita de inferencias de los elementos de *H*.

4.2 Esquema de la demostración directa

Este procedimiento nos lleva al descubrimiento de la veracidad de la tesis mediante el examen de las condiciones, los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones ya probadas que en conjunto conforman la hipótesis *H*, constituyéndose así en un razonamiento deductivo que nos conduce a la conclusión de la tesis *T*. Si de un conjunto finito de proposiciones $p_1, p_{2.}.....p_n$ que constituyen la hipótesis *H* se siguen como consecuencias lógicas las proposiciones $t_1, t_{2.}.....t_n$ y de éstas se concluye la tesis *T*, entonces decimos que el teorema $H \Rightarrow T$ se ha demostrado o deducido directamente. Debemos tener presente el esquema general de la demostración ilustrado en la figura 2.1.

Otra forma de esquematizar la demostración directa sería:

$$(1)\ \left\{\begin{matrix} P_1 \dots H \\ P_2 \dots H \\ P_k \dots H \end{matrix}\right\} \text{premisas que constituyen la hipótesis}$$

$$(2)\ \text{De } P_1, P_2 \text{ o } P_k \Rightarrow t_1 \rightarrow \begin{cases} \text{definición, postulado} \\ \text{u otro teorema} \end{cases}$$

$$(3)\ t_1 \Rightarrow t_2 \rightarrow \text{razón de (2) y así sucesivamente, hasta}$$

$$\vdots$$

$$(n)\ t_{n-1} \Rightarrow T \rightarrow \begin{cases} \text{definición, postulado} \\ \text{u otro teorema} \end{cases}$$

En forma simplificada: si a las premisas $P_1, P_2, \dots, P_k$ que forman la hipótesis las denotamos por *P*, entonces:

(1) $P \dots$ hipótesis

(2) $P \Rightarrow t_1 \dots$ fundamento

(3) $t_1 \Rightarrow t_2 \dots$ fundamento

(4) $t_2 \Rightarrow t_3 \dots$ fundamento

$\vdots$

(n) $t_{n-1} \Rightarrow T \dots$ fundamento

$(n+1)$. Luego $t_1 \Rightarrow T \dots$ silogismo entre (2) y (n).

$\therefore T$ es verdadera ... PP y se ha demostrado que $H \Rightarrow T$.

O más aún: $P \Rightarrow t_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow ... \Rightarrow t_n \Rightarrow T$.

$\therefore P \Rightarrow T \wedge T$ es verdadera.

En resumen, en una demostración directa cada paso debe ir acompañado de una explicación que justifique su presencia.

Ejemplo 4.2.1

Si a, b y c son números reales tales que $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. En este caso los fundamentos o bases de la demostración se encuentran en la definición de desigualdad, la multiplicación en desigualdad, la propiedad distributiva y el teorema: si a y b son números reales, entonces $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$.

Si aplicamos el teorema enunciado a la hipótesis $(a < b)$ tenemos $b - a > 0$. Como $c > 0$ (hipótesis), por la multiplicación en desigualdad obtenemos: $c\,(b - a) > 0$ y por la propiedad distributiva: $cb - ca > 0$. Si aplicamos de nuevo el teorema enunciado, entonces $ca < cb$ y la demostración ha concluido.

También podemos organizar la demostración de la siguiente forma:

1. a, b y $c \in \mathbb{R}$	(hipótesis)
2. $a < b$	(hipótesis)
3. $c > 0$	(hipótesis)
4. $b - a > 0$	(teorema enunciado aplicado a 2)
5. $c\,(b - a) > 0$	(multiplicación en desigualdad de 3 y 4)
6. $cb - ca > 0$	(propiedad distributiva en 5)
7. $ca < cb$	(teorema enunciado aplicado a 6)
8. $ac < bc$	(propiedad conmutativa)

4.3 Demostración indirecta

Si se tienen dificultades en la construcción de una demostración directa, se pueden obtener a veces resultados más simples y mejores empleando algunos otros métodos.

Cuando se establece la validez de una tesis T probando que las consecuencias de su contraria son falsas, entonces se realiza una *demostración indirecta*.

La demostración indirecta determina la veracidad de la tesis que se demuestra, no examinando ésta sino algunas otras proposiciones, las cuales se hallan concatenadas con la tesis que se demuestra, de tal manera que, comprobada la falsedad de aquéllas, se sigue necesariamente la veracidad de la tesis.

La demostración indirecta se basa en el hecho de que si $\sim T$ (negación de la tesis) es falsa, entonces T es verdadera. La mejor manera de hacerlo es mostrando que $\sim T$ no es compatible (contradice) con las afirmaciones dadas en la hipótesis H y por lo tanto $\sim T$ es falsa y T es verdadera.

Luego, para demostrar un teorema de la forma $H \Rightarrow T$, basta deducir alguna contradicción a partir de la hipótesis auxiliar $H \wedge \sim T$.

Hay cuatro formas diferentes del método indirecto de demostración.

a. $\sim T \Rightarrow \sim H$, ya que $H \Rightarrow T$ es equivalente (por leyes lógicas) a $\sim T \Rightarrow \sim H$. La

Jacob Steiner

Steiner realizó estudios sobre geometría proyectiva utilizando métodos sintéticos (independientes de las coordenadas). Propuso como problema una generalización del teorema de William Wallace: «Demostrar que el lugar de los puntos P del plano de un triángulo ABC tales que las proyecciones ortogonales U, V, W, de P sobre los lados a, b, c del triángulo ABC son vértices de un triángulo de área dada k es una circunferencia concéntrica con la circunscrita al triángulo ABC». La generalización fue demostrada rápidamente y apareció publicada en los *Anales de Gergonne*.

demostración indirecta, en este caso, se reduce a utilizar el contradirecto (módulo 6, apartado 6.2) $\sim T \Rightarrow \sim H$ del enunciado $H \Rightarrow T$

b. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow \sim H$

c. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow T$

d. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$

En los casos *b*, *c*, *d* hacemos uso de la hipótesis doble $H \wedge \sim T$, constituida por la conjunción de la hipótesis *(H)* y la negación de la tesis $\sim T$.

El caso *d* de la demostracion indirecta $(H \wedge \sim T) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ a menudo se llama *reducción al absurdo*.

Las formas *b, c* y *d* de la demostración indirecta son muy útiles ya que, como se observa, es posible tomar a $\sim T$ (negación de la tesis) como una hipótesis además de *H* y también porque existen otras dos conclusiones además de *T*.

Ejemplo 4.3.1

Si *a, b* y *c* son números reales tales que $a + c \leq b + c$, entonces $a \leq b$. La hipótesis es $a + c \leq b + c$ y la tesis es $a \leq b$. En este caso los fundamentos de la demostración se encuentran en la adición en desigualdades y la ley de tricotomía de los reales, además de la negación de la tesis.

1. $a \not\leq b$ es la negación de la tesis y constituye la hipótesis auxiliar.	
2. a, b y $c \in \mathbb{R}$	(hipótesis)
3. $a + c \leq b + c$	(hipótesis)
4. $b < a$	(ley de la tricotomía aplicada a 1)
5. $b + c < a + c$	(adición en desigualdad aplicada a 4)
6. $a + c \leq b + c$ y $b + c \leq a + c$	(contradicción entre 3 y 5)

Concluimos entonces que $a \leq b$.

Ejemplo 4.3.2

Sean *a* y *b* dos números reales, entonces $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$. El enunciado nos indica que hay un bicondicional cuya ley (12 del módulo 3, apartado 3.2) nos dice que:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

El enunciado debemos descomponerlo en dos condicionales:

a. $p \rightarrow q$: si $b - a > 0$, entonces $a < b$.

b. $q \rightarrow p$: si $a < b$, entonces $b - a > 0$.

Los fundamentos para la demostración están en la ley de tricotomía, la definición de desigualdad, las propiedades del inverso aditivo, el neutro aditivo, la asociatividad y la hipótesis auxiliar de la negación de la tesis.
Demostremos la parte *a*:

1. $a, b \in \mathbb{R}$	(hipótesis)

2. $b - a > 0$ (hipótesis)

3. $a \not< b$ (hipótesis auxiliar (negación de la tesis))

4. $a = b \vee a > b$ (de 3; ley de tricotomía)

Analicemos estas dos situaciones:

5. $a = b$ (hipótesis auxiliar)

6. $a + (-a) = b + (-a)$ (adición en la igualdad; en 5)

7. $a - a = b - a$ (definición)

8. $0 = b - a$ (inverso aditivo en 7)

9. $(b - a > 0) \wedge (b - a = 0)$ (de 2 y 8, es una contradicción con la ley de tricotomía)

10. $a \neq b$ (negación de 5 por ser falsa)

11. $a > b$ (hipótesis auxiliar, la otra alternativa de 4)

12. $a + (-a) > b + (-a)$ (adición aplicada en desigualdad 11)

13. $a - a > b - a$ (definición)

14. $0 > b - a$ (inverso aditivo en 13)

15. $b - a < 0$ (14 y 15 son equivalentes)

16. $(b - a < 0) \wedge (b - a) > 0$ (de 2 y 15, es una contradicción de la ley de tricotomía)

17. $a \not> b$ (negación de 11 por ser falsa)

Observamos que 4 separada en 5 y 11 produce las contradicciones 9 y 16, luego 4 es falsa (10, 17) y por tanto concluimos que $a < b$ (ley de tricotomía).

En forma similar se demuestra la parte *b*.

Otra forma de enfocar la demostración es:

$a \not< b$ (negación de la tesis), lo cual implica que $a = b$ o $a > b$, según la ley de tricotomía.

Si $a = b$ tenemos una contradicción con la hipótesis ($a < b$), luego $a \neq b$.

Si $a \not> b$ tenemos una contradicción con la hipótesis ($a < b$), luego $a \neq b$.

Como $a \neq b$ y $a \not> b$, entonces por la ley de la tricotomía la única alternativa que hay es $a < b$ y concluimos la demostración.

En la demostración anterior, ¿cuál es la fundamentación?

Módulo 5

Condicionales

Platón

(c. 427-c. 347 a.C.). Filósofo y matemático griego nacido en Atenas.

Contenidos del módulo

5.1 Condición de suficiencia y condición necesaria

Objetivos del módulo

1. Diferenciar entre condición suficiente y condición necesaria.
2. Determinar si una información dada es suficiente o necesaria, o suficiente y necesaria, para inferir lo solicitado.

Preguntas básicas

1. Con la información que me dan, ¿sí puedo concluir lo solicitado?
2. ¿La información dada será suficiente?
3. ¿La información dada será necesaria?
4. ¿La información dada será suficiente y necesaria?
5. ¿La información dada será necesaria pero no suficiente?
6. ¿La información dada será suficiente pero no necesaria?
7. ¿La información dada no es ni suficiente ni necesaria?

Introducción

Para realizar y controlar un proceso se deben conocer las condiciones con las cuales dicho proceso se cumple. Las condiciones deben responder a las preguntas formuladas, teniendo presente que pueden ser suficientes, necesarias o suficientes y necesarias. Se debe tener presente que una condición suficiente no es indispensable para la realización del suceso, contrario a la condición necesaria.

Vea el módulo 5 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

5.1 Condición de suficiencia y condición necesaria

Para la realización y el control de un proceso debemos conocer las condiciones con las cuales dicho proceso se cumple. Tales condiciones pueden ser:

a. Suficientes, sin ser necesarias
b. Necesarias pero no suficientes
c. Suficientes y necesarias

Definición 5.1.1

Una c*ondición suficiente* para la realización de un acontecimiento es una circunstancia en cuya presencia el acontecimiento debe ocurrir. Una condición suficiente no es indispensable para la realización de un acontecimiento.

Ejemplo 5.1.1

1. Ser divisible por 4 es una condición suficiente para que un número sea múltiplo de 2. Sin embargo, un número puede ser múltiplo de 2 sin ser divisible por 4.
2. Que a sea un número natural es condición suficiente para que sea número entero. Sin embargo a puede ser un número entero sin ser natural.
3. La proposición p es una condición suficiente para la proposición q, lo cual quiere decir que si p se verifica, entonces q se verifica $(p \to q)$, o también, que si q no se verifica, entonces p no pudo verificarse $(\sim q \to \sim p)$.

Definición 5.1.2

Una *condición necesaria* es aquella cuyo cumplimiento es indispensable para que se produzca un acontecimiento, es decir, la ausencia de tal condición determina la no realización del acontecimiento.

El hecho de que se cumpla una condición necesaria para la realización de un acontecimiento no indica que sea suficiente; éste puede, sin embargo, no realizarse.

Ejemplo 5.1.2

1. Sea n un entero. Entonces la condición «n es un entero negativo» es condición necesaria para que $2n$ sea un número negativo, puesto que no puede darse el caso de que $2n$ sea negativo siendo n positivo.
2. La presencia de oxígeno es una condición necesaria para la combustión de una sustancia. En efecto: sabemos que no puede producirse combustión de una sustancia en ausencia de oxígeno. Además puede existir oxígeno sin que se produzca la combustión, pues dicha condición no es suficiente.

La proposición p es una condición necesaria para q, lo cual quiere decir que q no puede verificarse si p no se verifica $(\sim p \to \sim q)$, o también, que si q se verifica, entonces p tiene que verificarse $(q \to p)$.

Definición 5.1.3

Una condición q que es a la vez suficiente y necesaria para el cumplimiento de un determinado acontecimiento, se llama *condición suficiente y necesaria*.

Ejemplo 5.1.3

1. Si n es un número entero, entonces la condición de ser a un número positivo es suficiente y necesaria para que $2a$ sea un entero positivo.
2. Elevar la temperatura a punto crítico en presencia de oxígeno es condición necesaria y suficiente para que se produzca la combustión de una sustancia.

Si p y q son dos proposiciones, entonces p es una condición suficiente y necesaria para q. Puede expresarse en la siguiente forma: $(p \to q) \wedge (q \to p)$, o también, $p \Leftrightarrow q$, que leemos p si y sólo si q.

Platón

En su pensamiento destaca la *teoría de las ideas*, que proponía que los objetos del mundo físico sólo se parecen o participan de las formas perfectas en el mundo ideal, y que sólo las formas perfectas pueden ser el objeto del verdadero conocimiento. La teoría de las ideas se puede entender mejor en términos de entidades matemáticas. Un círculo, por ejemplo, se define como una figura plana compuesta por una serie de puntos, todos equidistantes de un mismo lugar.

Para Platón, la forma de círculo existe, pero no en el mundo físico del espacio y del tiempo. Existe como un objeto inmutable en el ámbito de las ideas, que sólo puede ser conocido mediante la razón. Las ideas tienen mayor entidad que los objetos en el mundo físico tanto por su perfección y estabilidad como por el hecho de ser modelos, semejanzas que dan a los objetos físicos comunes lo que tienen de realidad. Las formas circular, cuadrada y triangular son excelentes ejemplos de lo que Platón entiende por idea. Un objeto que existe en el mundo físico puede ser llamado círculo, cuadrado o triángulo porque se parece («participa de», en palabras de Platón) a la idea de círculo, cuadrado o triángulo.

Módulo 6

La refutación

Dinostrato

(350 a.C). Matemático griego. Propuso la *cuadratura del círculo* y demostró que mediante la *trisectriz de Hipias* era posible lograrla. A esta curva se la empieza a llamar cuadratriz.

Contenidos del módulo

6.1 La refutación en la matemática
6.2 Formas condicionales

Objetivos del módulo

1. Emplear la refutación como una demostración de que algo no es verdadero.
2. Usar el contrarrecíproco en una demostración.
3. Inferir que hay proposiciones que no siempre se cumplen.
4. Utilizar los conocimientos en la demostración para justificar los pasos dados.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un contraejemplo?
2. ¿Siempre hay contraejemplos?
3. ¿Sólo se puede usar la demostración directa o la indirecta?

Introducción

Continuando con la demostración de si una proposición es falsa o verdadera, encontramos que una situación particular puede hacer que el enunciado presentado sea falso. Hay además en geometría y en otras áreas del conocimiento situaciones en las cuales una demostración es más sencilla o sólo posible usando el contrarrecíproco de la proposición. ¿Cómo saberlo? Cuando se aprenda el arte de la demostración, se pueden percibir dichas situaciones.

Vea el módulo 6 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

6.1 La refutación en la matemática

La *refutación* es el razonamiento o serie de razonamientos que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración.

Hay dos formas básicas para refutar una proposición:
a. Refutación por contradicción.
b. Refutación por contraejemplo o por ejemplo del contrario.

En la *refutación por contradicción* suponemos que la proposición dada es verdadera y utilizamos cualquiera de los métodos de demostración para llegar a una conclusión que contradiga una proposición cuya verdad ha sido aceptada o demostrada, con lo cual demostramos que la proposición dada es falsa.

Ejemplo 6.1.1

Refutar la afirmación: «Existe al menos un número real a tal que $a^2 < 0$ ».
Supongamos que esa proposición es verdadera y, por tanto, que «existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a^2 < 0$». La hipótesis será entonces: $a \in \mathbb{R}$ y $a^2 < 0$.

Por la ley de la tricotomía tenemos: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. Analicemos cada caso:

a. Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow a^2 > 0$, lo cual contradice la hipótesis $\left(a^2 < 0\right)$, de donde $a \nless 0$.

b. Si $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$, lo cual contradice la hipótesis y por consiguiente $a \neq 0$.

c. Si $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$, lo cual contradice la hipótesis $\left(a^2 < 0\right)$, luego $a \ngtr 0$.

En todos los casos hemos obtenido una contradicción, y con $a \nless 0$, $a \neq 0$, $a \ngtr 0$ concluimos que «no existe un número real a tal que $a^2 < 0$».

La *refutación por contraejemplo* o *por ejemplo del contrario* es uno de los procedimientos más eficaces para refutar una afirmación y consiste en hallar un caso en el cual no se cumpla la afirmación. Lo anterior indica que la prueba de existir una sola excepción es suficiente para refutar una afirmación.

El método es recomendado cuando se trata de refutar afirmaciones de la forma:
a. Todo individuo verifica la propiedad p.
b. Ningún individuo verifica la propiedad p.

Ejemplo 6.1.2

Refutar por contraejemplo la afirmación: «Para todo $n \in \aleph$ se verifica que $n^2 + n + 41$ es un número primo».

Si sustituimos n por los números naturales 1, 2, 3 ..., 38, 39 en la expresión $n^2 + n + 41$, podemos comprobar que los resultados son números primos.

Para $n = 1,\ n^2 + n + 41 = \left(1\right)^2 + 1 + 41 = 43.$

Para $n = 2, n^2 + n + 41 = (2)^2 + 2 + 41 = 47.$

Para $n = 39, n^2 + n + 41 = (39)^2 + 39 + 41 = 1601.$

Para $n = 40, n^2 + n + 41 = (40)^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40(41) + 41$

$= 41(40+1) = 41 \text{ x } 41$

lo cual nos indica que no es un número primo (es un número compuesto).

6.2 Formas condicionales

Hemos estudiado diferentes métodos de demostración y podemos observar que ellos corresponden a la estructura $H \Rightarrow T$, o contienen dicha estructura; por eso debemos estudiar algunos elementos de la lógica proporcional.

Recordemos que si p y q son proposiciones siempre se verifica que:

a. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

c. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

d. $(p \rightarrow q) \not\Rightarrow (q \rightarrow p)$

Podemos afirmar que las operaciones conjunción $(\wedge)$, disyunción $(\vee)$ y bicondicionalidad $(\leftrightarrow)$ son conmutativas, mientras que el condicional carece de dicha propiedad.

Dado el condicional $(p \rightarrow q)$ podemos obtener los siguientes condicionales que nos pueden ayudar en el proceso deductivo de la geometría:

a. $q \rightarrow p$ llamado *recíproco* (contrapuesto) del condicional $p \rightarrow q$

b. $\sim q \rightarrow \sim p$ se llama *contradirecto* del condicional $p \rightarrow q$

c. $\sim p \rightarrow \sim q$ conocido como *recíproco del contradirecto* (contrarrecíproco) del condicional $p \rightarrow q$

Lo anterior lo podemos establecer en el siguiente esquema.

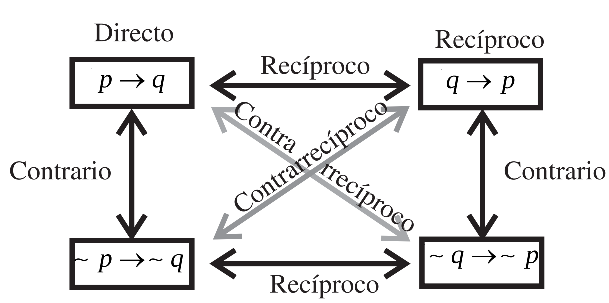


Figura 6.1

Dinostrato

La cuadratura del círculo (construcción con regla y compás de un cuadrado con área igual a la de un círculo dado) es un famoso problema que data de la época griega y fue propuesto, entre otros, por Dinostrato. La imposibilidad de esta construcción fue demostrada en 1882.

Podemos observar que en la demostración indirecta $(\sim T \Rightarrow \sim H)$ utilizamos el contradirecto de $H \Rightarrow T$.

Ejemplo 6.2.1

Dadas las proporciones:

p: «El número *n* es un número natural»
q: «El número *n* es un número entero», entonces,
$p \to q$: «Si el número *n* es un número natural, entonces es un número entero»

a. El *recíproco* de $p \to q$ es $q \to p$: «Si el número *n* es un entero, entonces *n* es un número natural»
b. El *contradirecto* de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$: «Si el número *n* no es un entero, entonces *n* no es un número natural»
c. El *recíproco* del *contradirecto* de $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$: «Si el número *n* no es natural, entonces *n* no es un número entero».

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 1
Algunos métodos de demostración

Módulos 1 al 6

Demuestre los siguientes teoremas en el sistema de los números reales:

1. Si a, b, c, d son números reales, entonces:
   $a + (b + c + d) = (a + b) + (c + d)$.

2. Sean a, b y c números reales, entonces:
   $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

3. Sean a, b y c números reales, entonces:
   $a + b = c \Rightarrow a = c - b$.

4. Para todo número real a, se cumple que $-(-a) = a$.

5. Para todo número real a se cumple que $(-1)\,a = -a$.

6. Que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

7. Si a, b y c son números reales tales que $ac \leq bc$ y c > o, entonces $a \leq b$.

8. Si a, b son números reales y $a > b > 0$, entonces $a^{-1} < b^{-1}$.

9. Si a y b son enteros impares, entonces ab es impar.

10. Si a^2 es impar, entonces a es impar.

Refute por contraejemplo las siguientes afirmaciones:

11. Para todo par de números reales a, b se cumple que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

12. Para todo par de números reales a y b se cumple que $(a - b)^3 = (b - a)^3$.

13. Ningún número entero positivo par es primo.

14. Todo número múltiplo de 2 y 3 es múltiplo de 12.